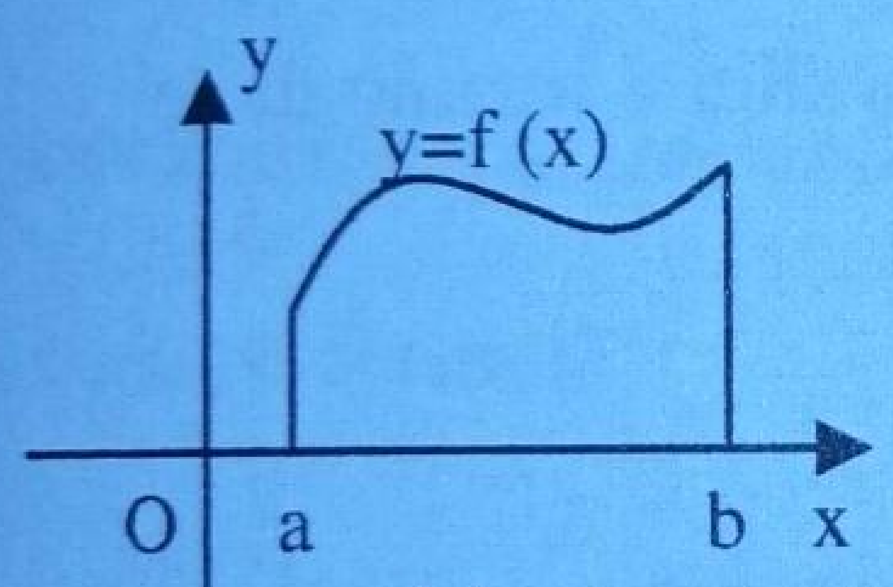
# 6.3. PRIMJENE ODREĐENOG INTEGRALA U GEOMETRIJI

## a) Izračunavanje površine ravnih figura

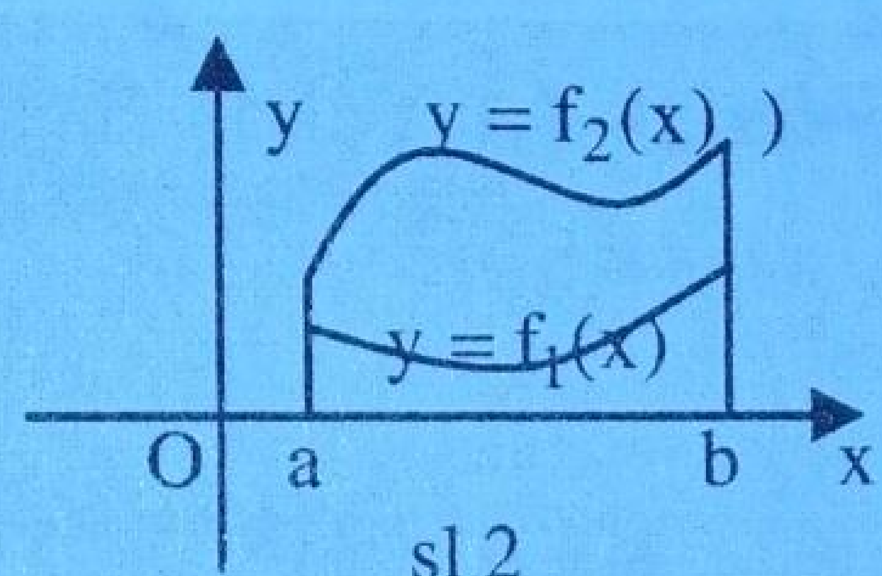
Izračunavanje površina ravnih figura zasnovano je na geometrijskom smislu određenog integrala.

- Površina krivolinijskog trapeza, ograničenog sa gornje strane grafikom funkcije y=f(x) (f(x)≥0), sa lijeve i desne strane pravama x=a i x=b, odozdo odsječkom [a,b] ose Ox (sl 1) izračunava se po formuli

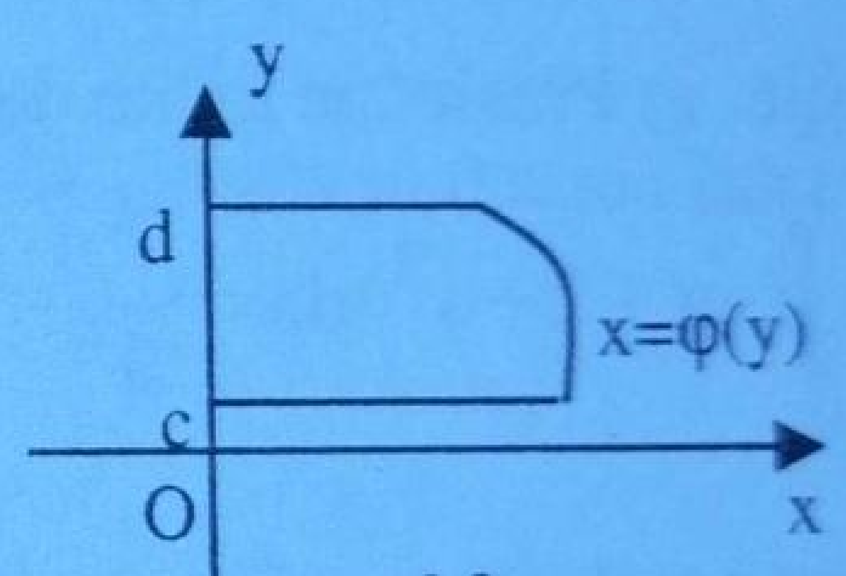
$$S=\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$



sl 1



sl 2



sl 3

- Ako je f(x)≤0 za x∈ [a,b], tada je

$$S=-\int_a^b f(x)dx\,. \tag{2}$$

Formule (1) i (2) mogu se objediniti u jednu formulu

$$S=\int_a^b |f(x)|dx\,. \tag{3}$$

- Specijalno, ako se kriva y=f(x) u intervalu (b,c) nalazi ispod ose Ox, a na inetrvalima (a,c) i (c,d) iznad ose Ox, tada je površina lika kojeg gradi kriva y=f(x), x∈ [a,b] sa osom Ox izračunava po formuli

$$S=\int_a^b f(x)dx+\left|\int_b^c f(x)dx\right|+\int_c^d f(x)dx\,.$$

- Površina figure, ograničene krivama $y=f_1(x)$ i $y=f_2(x)$, pri čemu je $f_1(x)\le f_2(x)$, x∈ [a,b], pravama x=a i x=b (sl 2) računa se po formuli

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx\,.$$

- Ako je krivolinijski trapez ograničen krivom $x=\varphi(y)$, pravama $y=c$, $y=d$ i odsječkom $[c,d]$ ose Oy (sl 3), tada se njegova površina računa po formuli

$$S=\int_c^d\varphi(y)dy\,.$$

- Ako je krivolinijski trapez ograničen sa gornje strane krivom zadatom parametarskim jednačinama $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $y(t)\geq 0$, $t\in[t_1,t_2]$, pravama $x=a$ i $x=b$ i odsječkom $[a,b]$, tada se površina trapeza računa po formuli

$$S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)x'(t)dt\,,$$

gdje su $t_1$ i $t_2$ rješenja jednačina $a=x(t_1)$ i $b=x(t_2)$.

**Primjer 1.** Izračunati površinu figure ograničene linijama :

a) $y=2-|x|$ i $y=x^2$, b) $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+6$ i $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$, c) $y=x^3-3x$ i $y=x$.

Rješenje. a) Presječne tačke datih krivih su:$(-1,1)$ i $(1,1)$. Saglasno slici 4 imamo da je

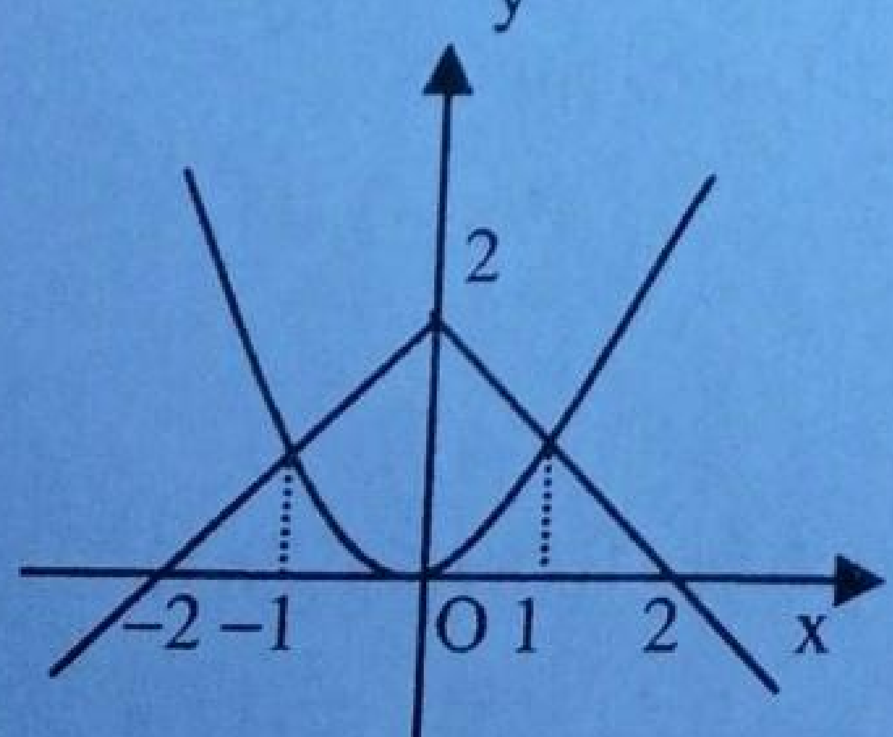
$$P=2\int_0^1(-x+2-x^2)dx=\frac{7}{3}\,.$$

b) Date parabole se sijeku u tačkama $\left(-1,\frac{5}{2}\right)$ i $\left(5,\frac{17}{2}\right)$. Saglasno slici 5 imamo da je

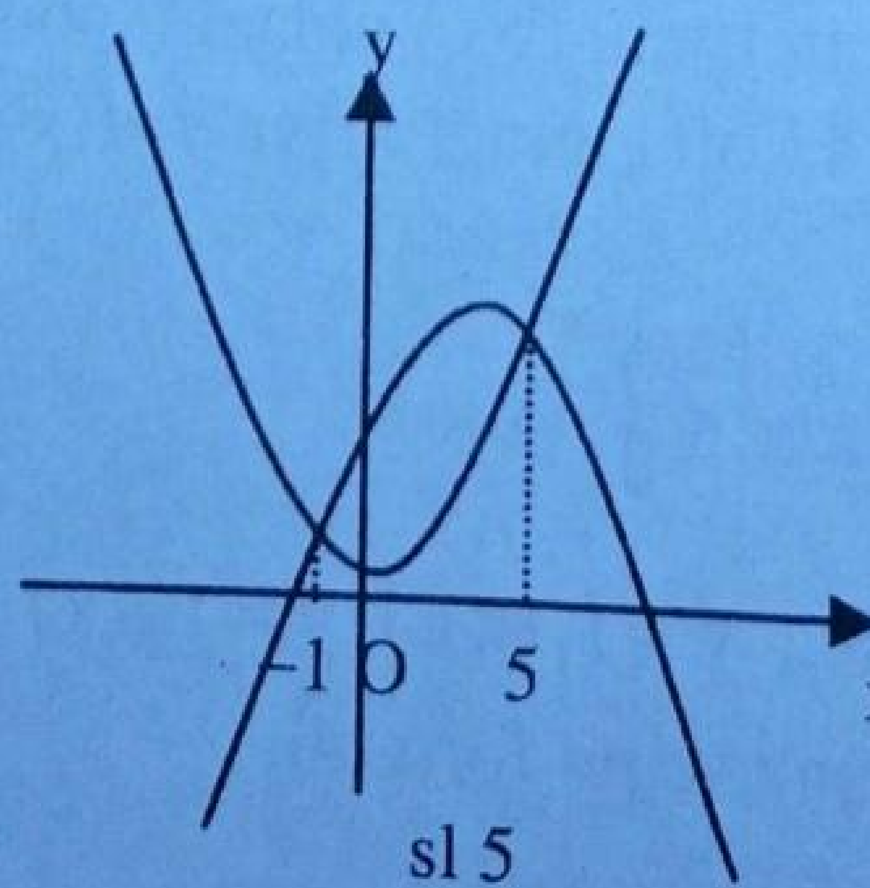
$$P=\int_{-1}^{5}(-\frac{1}{2}x^2+3x+6-\frac{1}{2}x^2+x-1)dx\quad\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)dx=36\,.$$

c) Presječne tačke date krive i prave $y=x$ su $(-2,-2)$, $(0,0)$, $(2,2)$. Saglasno slici 6 imamo da je

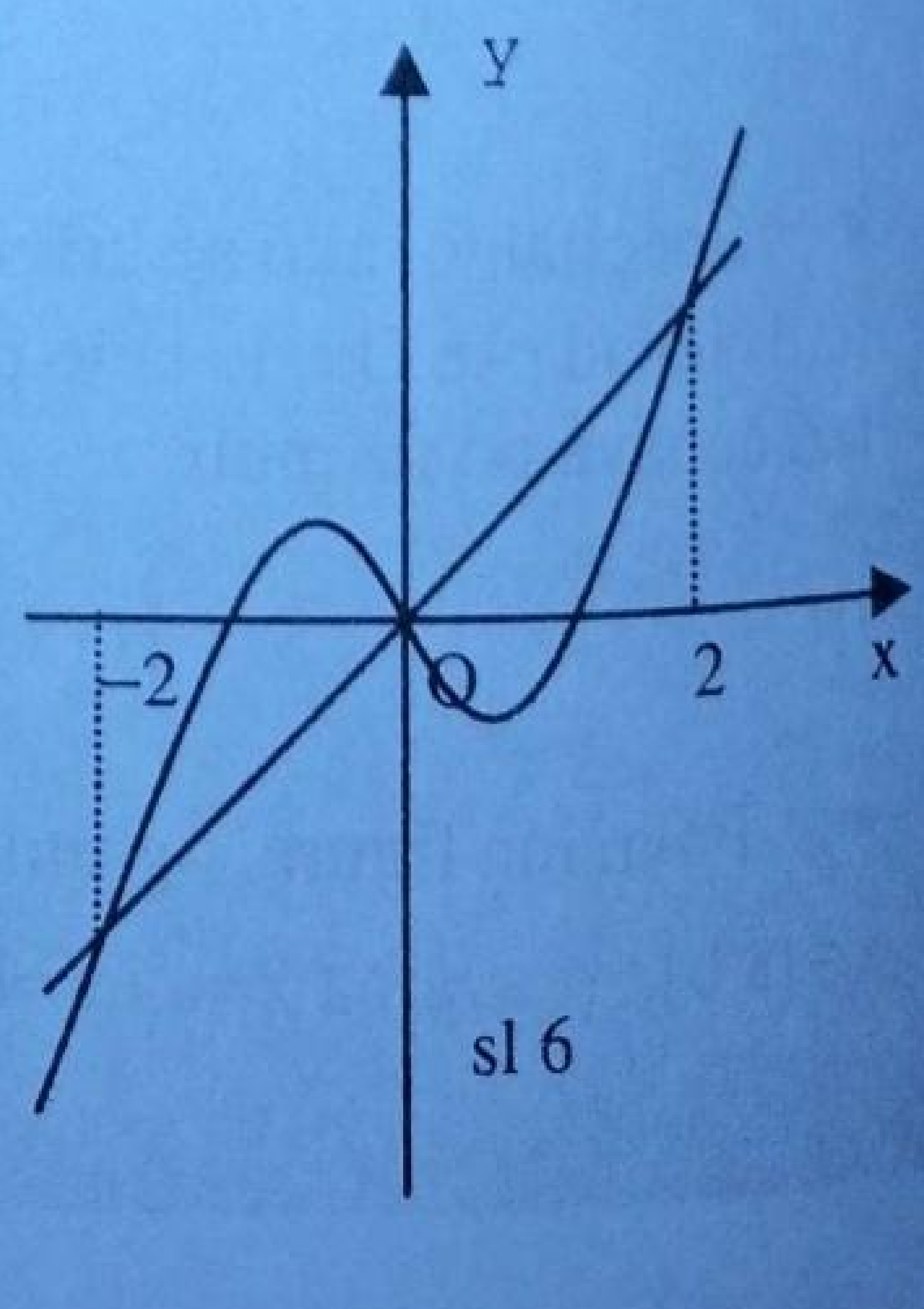
$$P=2\int_0^2(x-x^3+3x)dx=8\,.$$



sl 4



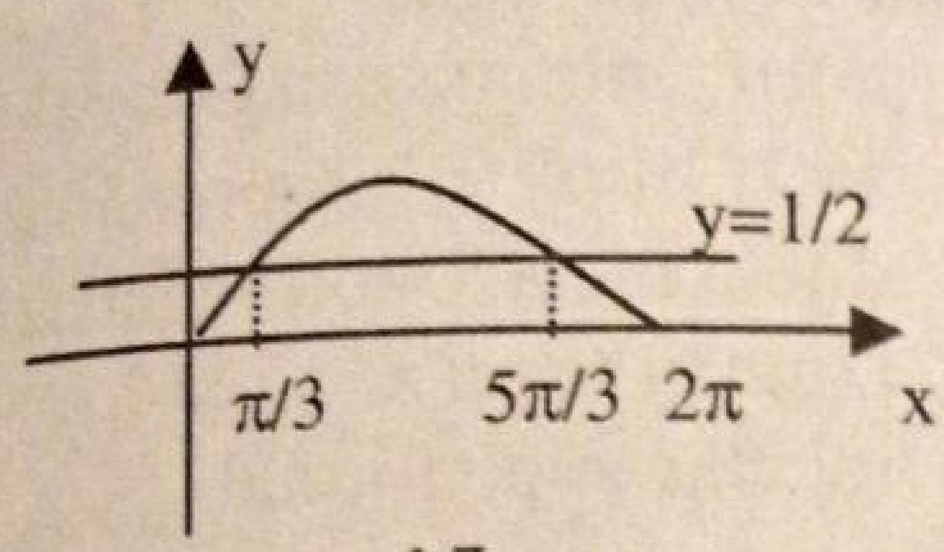
sl 5



sl 6

**Primjer 2.** Naći površinu ograničenu jednim lukom cikloide: $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\pi$ i pravom $y=\frac{1}{2}$.

Rješenje. Kako je $1-\cos t=\frac{1}{2}$ za $t=\frac{\pi}{3}$ i $t=\frac{5\pi}{3}$, to je saglasno slici 7:




sl 7

$$P=2\int_{\pi/3}^{5\pi/3} y(t)x'(t)dt-\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{5\pi/3} dx=2\int_{\pi/3}^{5\pi/3}\left((1-\cos t)^2-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{4\pi}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

## b) Izračunavanje dužine luka krive

Neka je u ravni zadata kriva jednačinom $y=f(x)$ ili $x=\varphi(y)$. Na krivoj su izabrane dvije tačke $A(a,c)$ i $B(b,d)$. Dužina L luka krive od tačke A do tačke B računa se po formuli

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx \text{ ili } L=\int_c^d\sqrt{1+(x')^2}\,dy.$$

Ako je kriva zadata parametarskim jednačinama $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$, $t_1\le t\le t_2$, tada se dužina luka krive računa po formuli

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2(t)+(y')^2(t)}\,dt.$$

**Primjer 3.** Naći obim kružnice poluprečnika R.

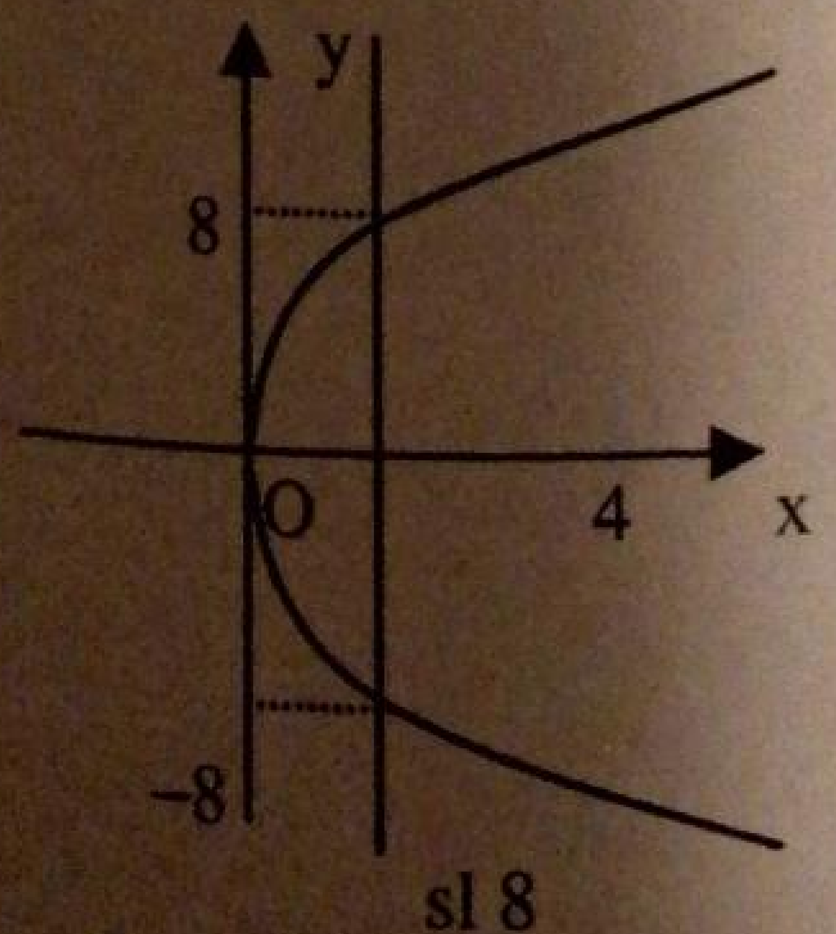
Rješenje. Jednačinu kružnice $x^2+y^2=R^2$ napišimo u parametarskom obliku. Dobijamo da je $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $0\le t\le 2\pi$. Neka je L obim date kružnice . Zbog simetričnosti kružnice u odnosu na koordinatne ose imamo da je $L=4\int_0^{\pi/2}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=4R\int_0^{\pi/2}dt=2\pi R$.

**Primjer 4.** Naći dužinu luka krive $y^2=16x$ koji odsijeca prava $x=4$.

Rješenje. Izračunavanje dužine traženog luka će se pojednostaviti ako posmatramo $x=x(y)$, a ne $y=y(x)$. Prema slici 8 imamo da je $L=2\int_0^8\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy=$

$$2\int_0^8\sqrt{1+\left(\frac{y}{8}\right)^2}\,dy=2\int_0^8\sqrt{1+\left(\frac{y}{8}\right)^2}\,dy=16\int_0^1\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$8(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$

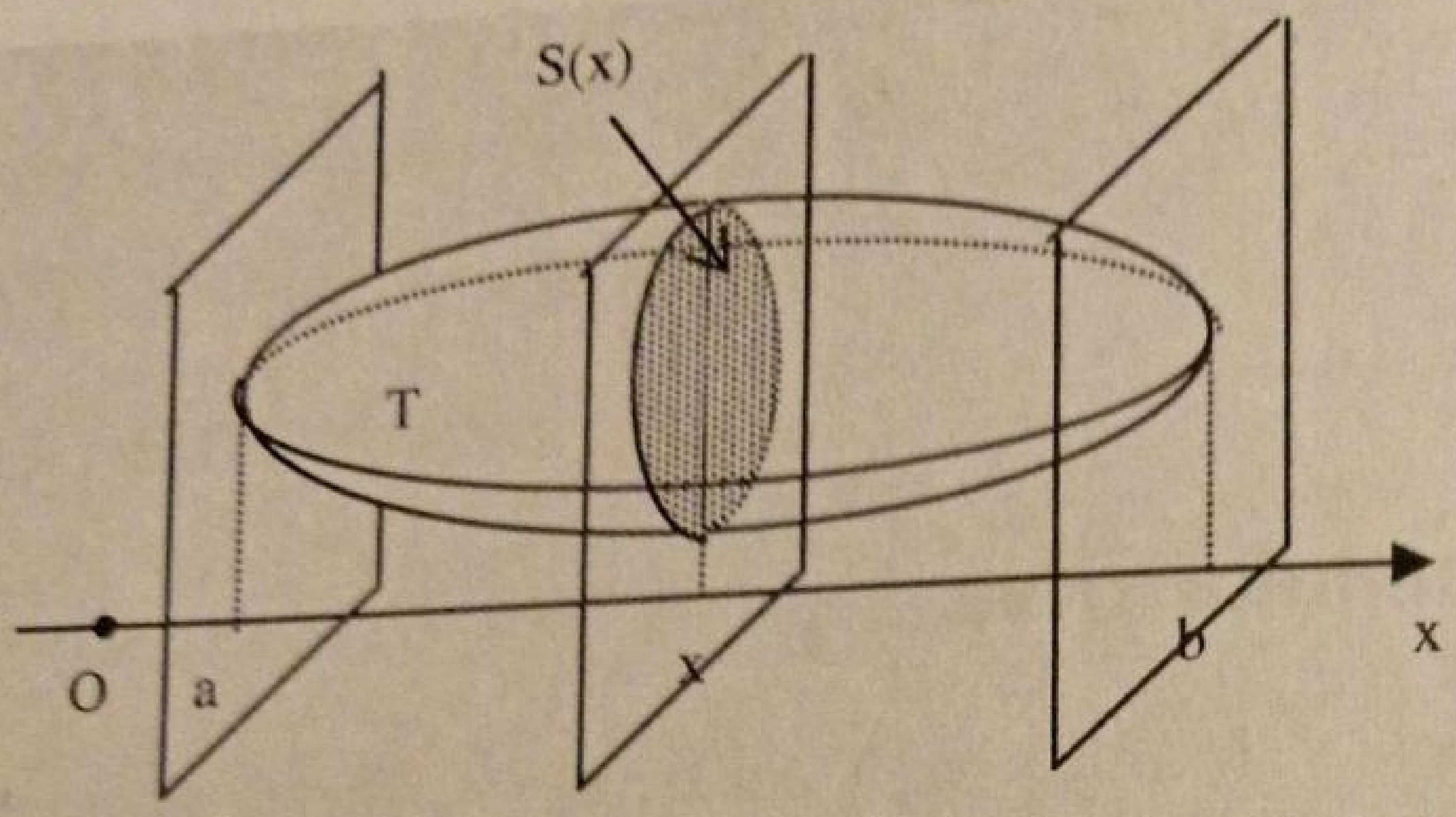



sl 8

## c) Izračunavanje zapremine tijela

**Zapremina tijela sa poznatim površinama poprečnih presjeka**. Neka je u prostoru zadato tijelo T (sl 9). Označimo sa S(x) površine poprečnih presjeka tijela T sa ravnima normalnim na osu Ox za $x \in [a,b]$ (sl 9). Zapremina dijela tijela T koji se nalazi između ravni x=a i x=b računa se po formuli

$$V = \int_a^b S(x)dx .$$

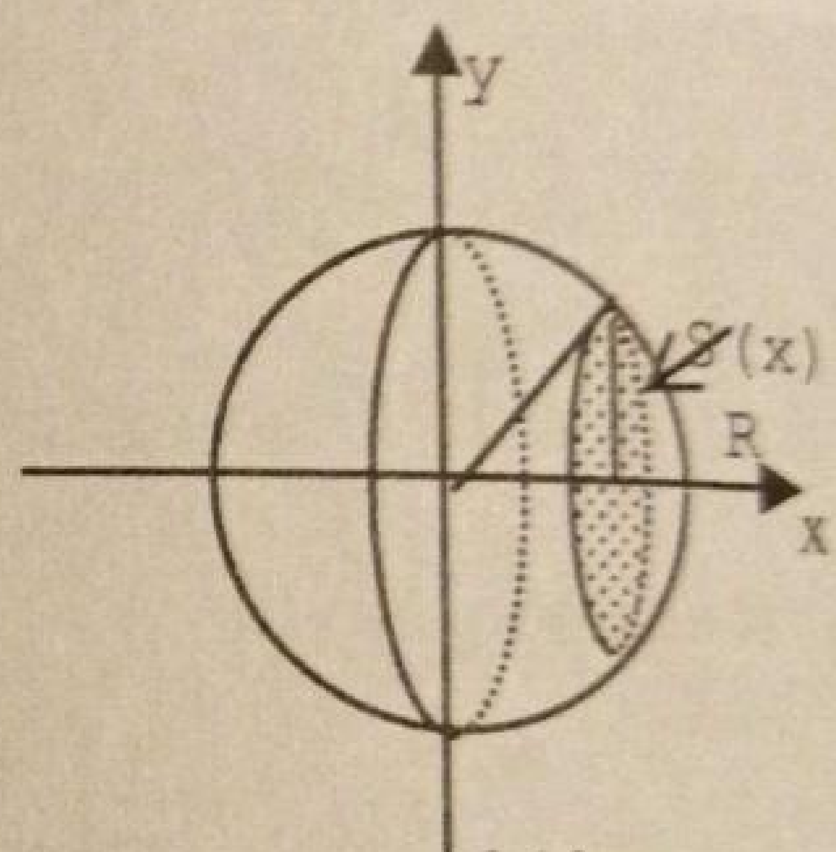



sl 9

**Primjer 5.** Izračunati površinu lopte poluprečnika R.

Rješenje. Presjek lopte sa ravni koja sadrži taku (x,0) i koja je normalna na osu Ox je kružnica poluprečnika r (sl 10) čija je površina S(x). Kako je $R^2 = x^2 + r^2$, to je $S(x) = (R^2 - x^2)\pi$. Dalje je $V = \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx =$

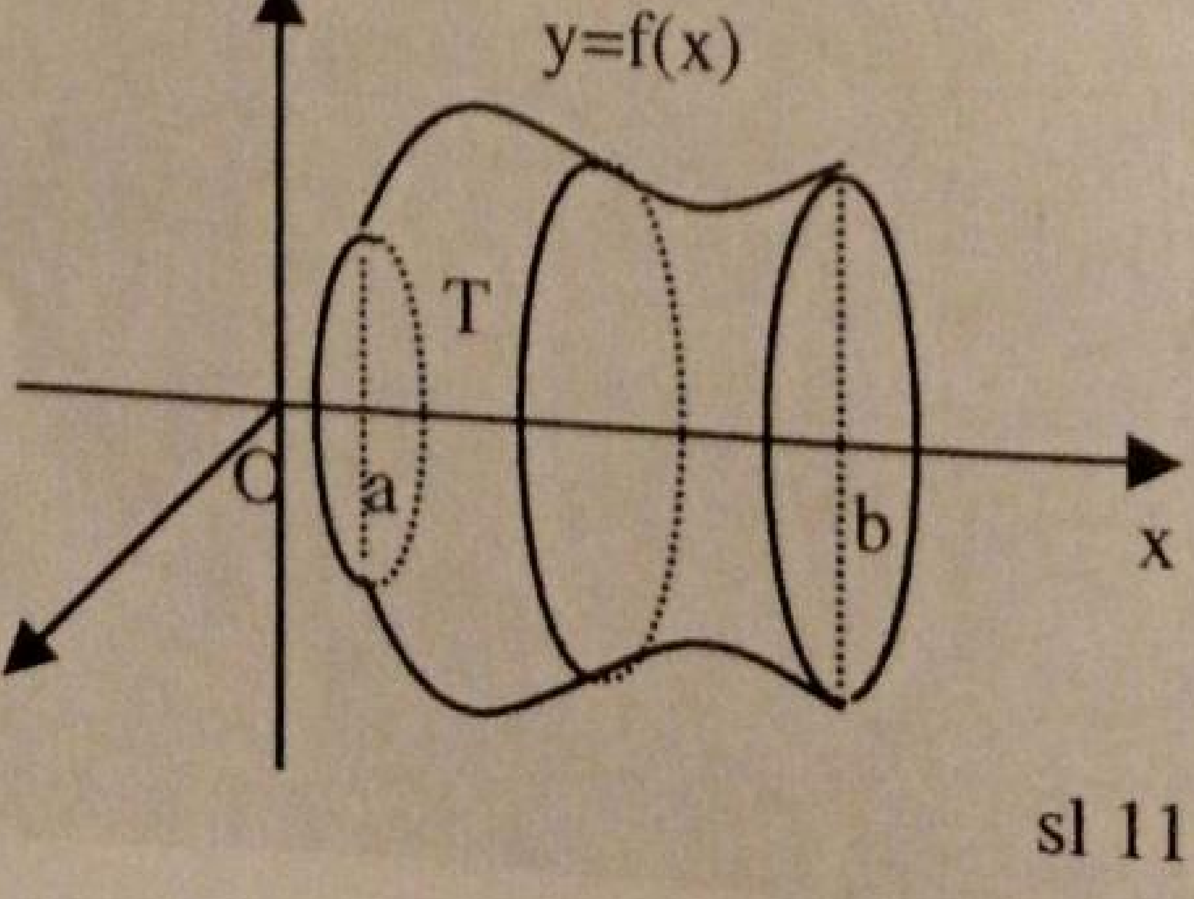
$$\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$




sl 10

**Zapremina rotacionog tijela**. Neka tijelo T nastaje rotacijom oko ose Ox (Oy) krivolinijskog trapeza: y=f(x) $(f(x) \geq 0)$, y=0, x=a, x=b (sl 11). Zapremina tijela T se računa po formuli

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \quad (V_y = 2\pi \int_a^b xy dx , a \geq 0).$$




sl 11

Ako je kriva zadata u parametarskom obliku: x=x(t), y=y(t), $t\in[\alpha,\beta]$, tada se zapremina računa po formuli

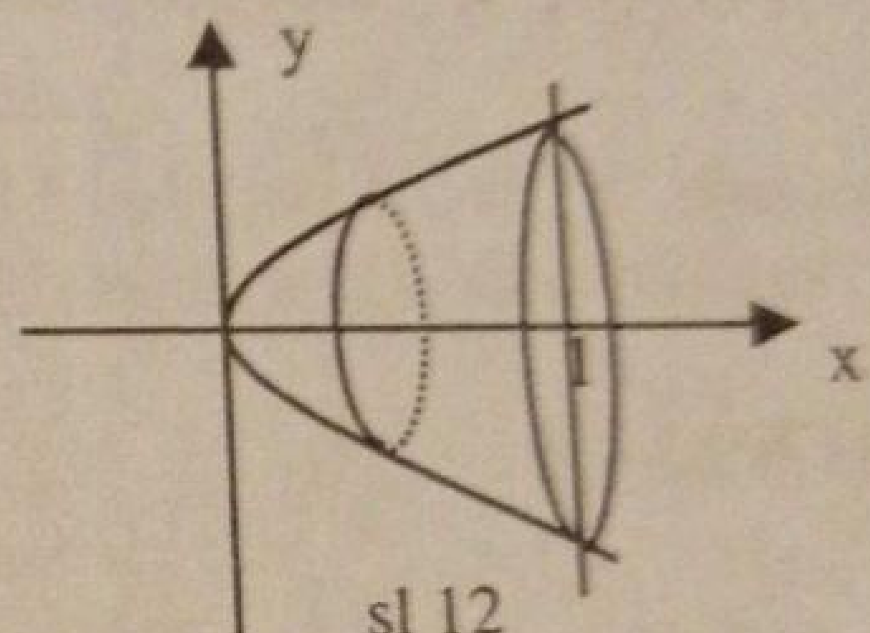
$$V_x = \pi\int_{\alpha}^{\beta}[y(t)]^2 x'(t)dt .$$

Ako tijelo T nastaje rotacijom, oko ose Oy, krivolinijskog trapeza: $x=\varphi(y)$ $(\varphi(y)\geq 0)$, x=0, y=c, y=d, tada se zaptremina tijela T računa po formuli

$$V_y = \pi\int_{a}^{b} x^2 dy .$$

**Primjer 6.** Izračunati zapreminu tijela koje nastaje rotacijom oko ose Ox figure $y^2 = 4x$, y=0, x=1.

Rješenje. $V_x = \pi\int_0^1 4x dx = 2\pi$.



sl 12

## d) Izračunavanje površine rotacionih tijela

- Ako luk krive y=f(x), $a\leq x\leq b$ rotira oko ose Ox, tada se površina površi koja tako nastaje računa po formuli

$$S_x = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx ,$$

gdje su a i b apscise početka i kraja luka.

- Ako luk krive $x=\varphi(y)$, $c\leq y\leq d$ rotira oko ose Oy, tada se površina površi koja tako nastaje računa po formuli

$$S_y = 2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy ,$$

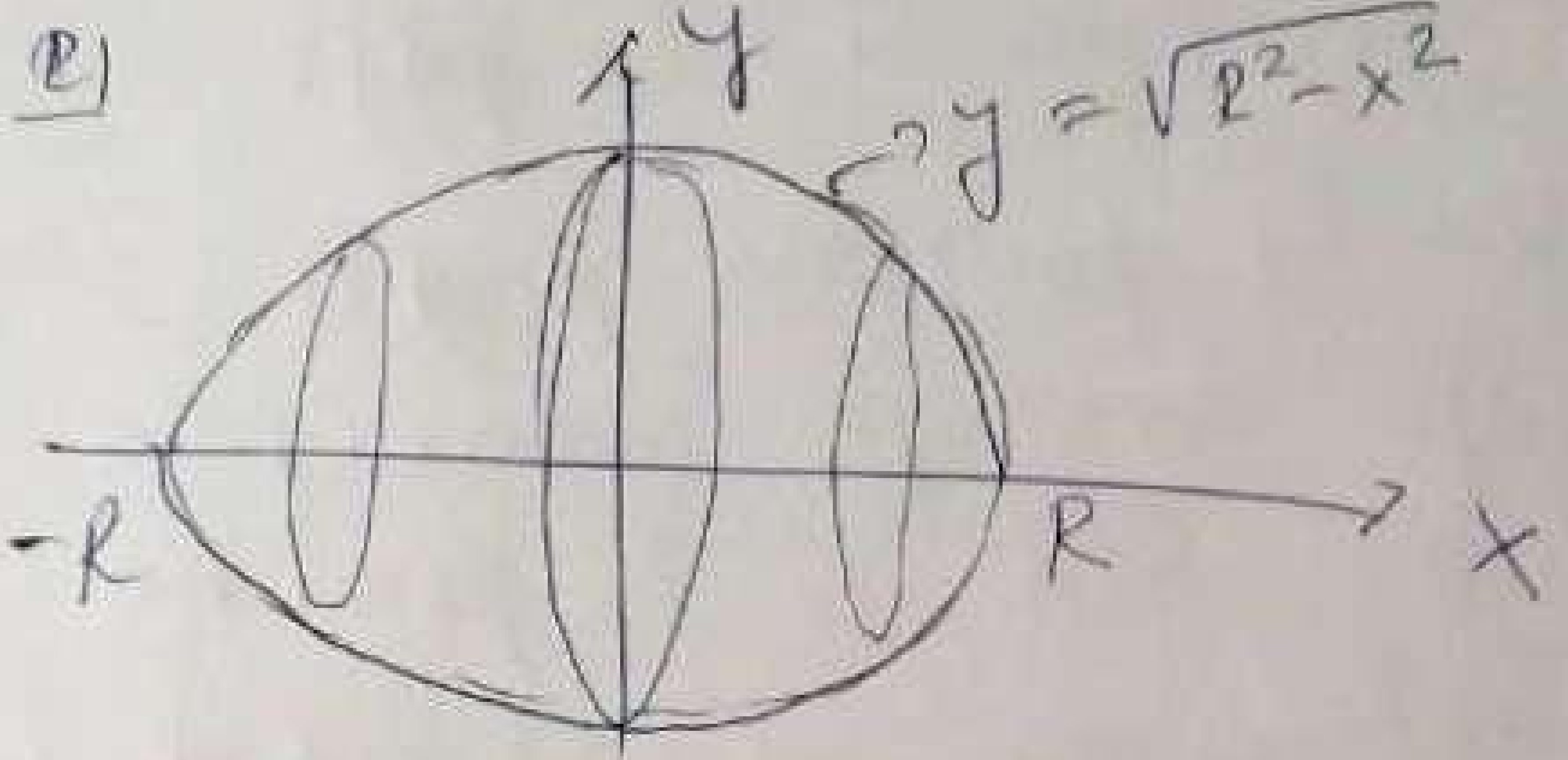
gdje su c i d apscise početka i kraja luka.

- Ako je kriva zadata parametarskim jednačinama x=x(t), y=y(t), $\alpha\leq t\leq\beta$, tada se površina površi koja nastaje rotacijom luka krive oko ose Ox računa po formuli

$$S_x = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt .$$

Primjer 7: Izračunati površinu lopte poluprečnika $R$.

R)




Neka je $x^2+y^2=R^2$ jednačina kružnice. Oko ose $Ox$ rotira polukružnica $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Kako je $y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}$ to je:

$$P_x=2\pi\int_{-R}^{R} y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx$$

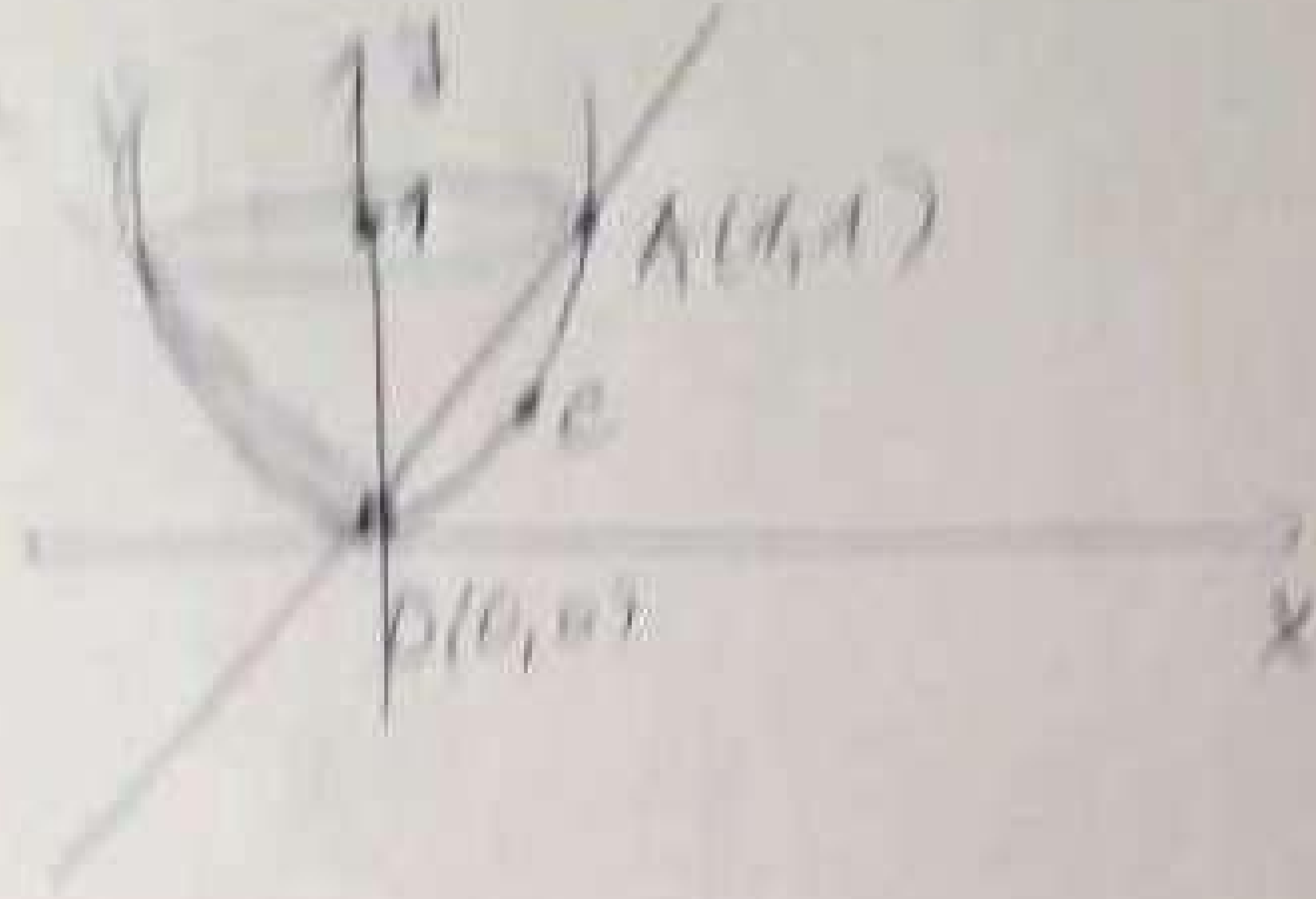
$$=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=2\pi R\left(x\Big|_{-R}^{R}\right)=4\pi R^2.$$

Primjer 8: Naći površinu površi koja nastaje rotacijom oko ose $Oy$ zatvorene konture koje ograničavaju krive $y=x^2$ i $y=x$.

R) Iz sistema $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x \end{cases}$ dobijamo $\begin{cases} y=x \\ x=x^2 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y=x \\ x=0 \vee x=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

Dakle presječne tačke prave $y=x$ i parabole $y=x^2$ su $O(0,0)$ i $A(1,1)$.




Tražena površina biće jednaka zbiru površina $P_1$ i $P_2$ gdje je $P_1$ površina površi koja nastaje rotacijom luka $\overset{\frown}{OCA}$, a $P_2$ površina površi koja nastaje rotacijom duži $OA$ oko $Oy$.

Odredićemo $P_1$. Iz $y=x^2$ dobijamo da je jednačina luka $\overset{\frown}{OCA}$: $x=\sqrt{y}$, $(0\le y\le 1)$.

$$P_1 = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+x'^2}\,dy \underset{\substack{\downarrow\\ x=\sqrt{y}\\ x'=\frac{1}{2\sqrt{y}}}}{=} 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\,dy =$$

$$= 2\pi\int_0^1 \sqrt{y}\,\frac{\sqrt{4y+1}}{2\sqrt{y}}\,dy = \pi\int_0^1\sqrt{4y+1}\,dy = \left[\begin{array}{l} 4y+1=t \\ dy=\frac{1}{4}dt \\ \begin{array}{c|c|c} y & 0 & 1 \\ \hline t & 1 & 5 \end{array}\end{array}\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_1^5\sqrt{t}\,dt = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^5\right) = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

Odredićemo $P_2$. Iz $y=x$ dobijamo:

$$P_2 = 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+x'^2}\,dy \underset{\substack{\downarrow\\ x=y\\ x'_y=1}}{=} 2\pi\int_0^1 y\sqrt{2}\,dy =$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right) = \pi\sqrt{2}.$$